2. KOLOKVIJ IZ TOPOLOGIJE
6. 2. 2007

1. NALOGA (25 točk)

Naj bo X topološki prostor, vse podmožice X pa naj bodo opremljene s topologijo podprostora. Dokaži naslednje trditve:

(a) Če je D gosta podmnožica v X in je A odprta v X, potem je $D \cap A$ gosta v A.
Ali trditev velja tudi, če A ni odprta?

(b) Če je $D \subset A \subset X$ in je D gosta podmnožica v A, potem je D gosta v $\bar{A}$.

(c) Naj bo $\{A_\lambda\}$ družina podmnožic v X in naj bo $D \cap A_\lambda$ gosta v A_λ za vse λ. Potem je $D \cap (\cup_\lambda A_\lambda)$ gosta v $\cup_\lambda A_\lambda$.
Ali je tudi $D \cap (\cap_\lambda A_\lambda)$ gosta v $\cap_\lambda A_\lambda$?

2. NALOGA (25 točk)

Za prostora X in Y naj $X \times Y$ označuje njun kartezični produkt s produktno topologijo. Dokaži:

(a) Če X in Y zadoščata aksiomu T_1, tudi $X \times Y$ zadošča aksiomu T_1.

(b) Če X in Y zadoščata aksiomu T_2, tudi $X \times Y$ zadošča aksiomu T_2.

(c) Če sta X in Y regularna, je regularen tudi $X \times Y$.

3. NALOGA (25 točk)

(a) Naj bo X topološki prostor in $A \subset X$.
Dokaži: Če povezana množica $C \subset X$ seka tako množico A kot njen komplement, potem C seka tudi mejo množice A.

(b) Pojasni, zakaj podprostora C in A v $\mathbb{R}^3$, podana s

$$C = \{(0,0,z) \mid z \in \mathbb{R}\} \quad \text{in} \quad A = \{(x,y,0) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\},$$

nista protiprimer za trditev iz točke (a).

4. NALOGA (25 točk)

(a) Dokaži, da ima odprta množica v $\mathbb{R}^n$ največ števno mnogo komponent.

(b) Poišči primer podmnožice v $\mathbb{R}^n$, ki ima neštevno mnogo komponent.